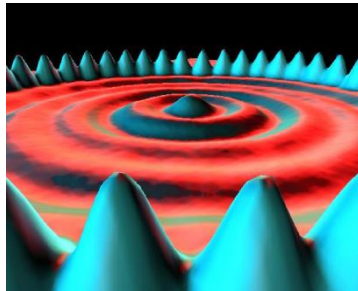


Κβαντοφυσική

*Η φυσική των πολύ μικρών στοιχείων
με τις μεγάλες εφαρμογές*



3^ο Μέρος : ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΡΙΟΤΗΤΕΣ

Περίθλαση Ηλεκτρονίων



Το Quantum Spin-Off χρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση υπό το πρόγραμμα LLP Comenius (540059-LLP-1-2013-1-BE-COMENIUS-CMP).

Renaat Frans, Laura Tamassia

Επαφή: renaat.frans@khlim.be

Το παρόν υλικό αντικατοπτρίζει τις απόψεις των συγγραφέων και η Ευρωπαϊκή Επιτροπή δεν μπορεί να θεωρηθεί υπεύθυνη για τη χρήση οποιασδήποτε πληροφορίας περιέχεται στο παρόν



ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΩΤΗΣΗ:

Ελέγξτε αν το προβλεπόμενο από την υπόθεση του De Broglie μήκος κύματος του ηλεκτρονίου ανταποκρίνεται στην μετρούμενη τιμή από το διαμόρφωμα περίθλασης;

ΜΕΡΟΣ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ: ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΕΝΟΣ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ;

Οι σωματιδιακές ιδιότητες των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Οι Albert Einstein και Max Planck ανακάλυψαν στα πρώτα χρόνια του 20^{ου} αιώνα ότι το φως – το οποίο με βάση την κλασική θεωρία είναι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα – είχε και σωματιδιακές ιδιότητες. Το φως το οποίο μπορούσε να περιγραφεί ως ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα φαινόταν να καταφθάνει ως ένα σωματίο τη φορά! Αυτά τα σωματίδια φωτός ονομάστηκαν φωτόνια σε αναλογία με τη λέξη «ηλεκτρόνιο».



Συνήθως δεν το παρατηρούμε, αλλά προκύπτει ότι μια φωτογραφία συντίθεται με ρυθμό ενός φωτονίου τη φορά. Εδώ μπορείτε να δείτε πως η εικόνα κατασκευάζεται από ολοένα και περισσότερα φωτόνια. Η εικόνα αυτή αποκτήθηκε αλλάζοντας τον χρόνο έκθεσης. Η λιγότερο φωτισμένη φωτογραφία αποτελείται από περίπου 3000 φωτόνια, ενώ η πιο εκτεθειμένη αποτελείται από 30.000.000 φωτόνια.

Ο κυματικός χαρακτήρας της ύλης

Ο Louis de Broglie αναρωτήθηκε το 1924 εάν η ύλη θα μπορούσε επίσης να έχει κυματικές ιδιότητες. Εν τέλει το φως ήταν ένα κύμα και φαινόταν να έχει υλικές ιδιότητες. Ίσως το αντίθετο να ήταν αληθές και για την ύλη. Με άλλα λόγια, ίσως να υπάρχει ένας θεμελιώδης κυματοσωματιδιακός δυϊσμός για κάθε φυσικό σύστημα. Αυτή η σκέψη περι της συμμετρίας της φύσης αποδείχθηκε ότι ήταν σωστή και έχει οδηγήσει σε μια νέα μηχανική για πολύ μικρά «αντικείμενα»: την κυματική μηχανική (ένα άλλο όνομα για την κβαντομηχανική). Άλλοι άνθρωποι όπως ο Werner Heisenberg και ο Erwin Schrödinger ανέπτυξαν αυτή τη θεωρία περεταίρω μετά τον De Broglie.

Πρακτική Δραστηριότητα: Περίθλαση Ηλεκτρονίων

Σήμερα χρησιμοποιούμε αυτή τη θεωρία (ή μάλλον μια ακόμη πιο προχωρημένη θεωρία γνωστή ως Κβαντική Θεωρία Πεδίου) για να εξηγήσουμε ιδιότητες της ύλης όπως το χρώμα της, την σταθερότητα της ύλης, τους χημικούς δεσμούς κλπ.

Η κβαντική μηχανική είναι στις μέρες μας μια από τις θεμελιώδεις θεωρίες της φυσικής. Η υπόθεση του De Broglie βρίσκεται στην βάση αυτών των νέων θεωριών. Ήταν ο πρώτος ο οποίος συσχέτισε τις σωματιδιακές με τις κυματικές ιδιότητες με την περίφημη σχέση του:

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (1)$$

Η εξίσωση πράγματι συσχέτισε τις σωματιδιακές ιδιότητες στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης (ορμή) με τις κυματικές ιδιότητες στην δεξιά πλευρά (μήκος κύματος). Η σχέση εξαρτάται από μια θεμελιώδη σταθερά της φύσης, το h , η οποία είναι γνωστή ως η σταθερά του Planck. Η τιμή της είναι πολύ μικρή και ισούται με :

$$h = 6,6260693 \cdot 10^{-34} Js$$

Στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης έχουμε το p . Αυτή είναι η ορμή η οποία είναι ιδιότητα των σωματιδίων. Ένα σωματίο το οποίο κινείται έχει ορμή ίση με την μάζα επί την ταχύτητά του.

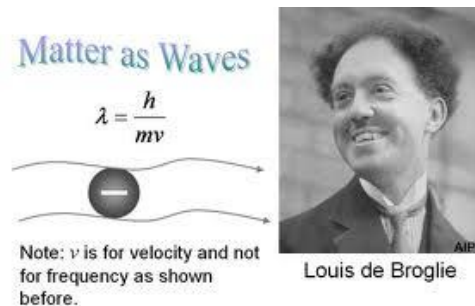
$$p = mv$$

Η ορμή είναι μία γνωστή έννοια της κλασσικής μηχανικής ο οποία αναπτύχθηκε από τον Νεύτωνα. Η αλλαγή στην ορμή ισούται με την δύναμη που ασκείται στο σώμα¹.

Στην δεξιά πλευρά της σχέσης του De Broglie αντιστοιχούμε ένα μήκος κύματος σε ένα σωματίο με ορμή. Το μήκος κύματος είναι στον παρονομαστή: ένα σωματίο με μεγάλη ορμή θα έχει (μικρό/μεγάλο) μήκος κύματος.

Η υπόθεση του De Broglie μπορεί να προβλέψει το μήκος κύματος σωματιδίων όπως οι μπάλες και τα ηλεκτρόνια.

1. Προβλέψτε το μήκος κύματος μιας μπάλας 0,1 kg η οποία κινείται με ταχύτητα 10 m/s. Γιατί δεν παρατηρούμε το μήκος κύματος αυτής της μπάλας; (Απάντηση: $6,63 \times 10^{-34} \text{ m}$)



¹ If you doubt this, try to change the momentum of a truck and then of a toy car. Even if they both have the same speed, the necessary force will be a lot larger for the truck because its mass is a lot bigger.

2. Προβλέψτε το μήκος κύματος ενός ηλεκτρονίου το οποίο κινείται με ταχύτητα 812 m/s. Η μάζα του ηλεκτρονίου ισούται με $9,11 \times 10^{-31}$ kg (Απάντηση: 897 nm)

Πειραματική επιβεβαίωση των υλικών κυμάτων



Η σχέση κύματος-σωματιδίου του De Broglie έχει ελεγχθεί και επιβεβαιωθεί πολλές φορές από το 1920. Η πιο διάσημη από αυτές τις πειραματικές επιβεβαιώσεις είναι γνωστή ως το πείραμα διπλής σχισμής για ηλεκτρόνια το οποίο έγινε πρώτη φορά από τον Clauss Jönsson (Πανεπιστήμιο του Tübingen, D). Ο Jönsson μπόρεσε να δείξει συμβολή των ηλεκτρονίων όταν διέρχονται από δύο σχισμές, κάτι το οποίο δείχνει αδιαμφισβήτητα τον κυματικό χαρακτήρα των ηλεκτρονίων.

Η αυθεντική φωτογραφία της συμβολής ηλεκτρονίων σε ένα πείραμα διπλής οπής με ηλεκτρόνια (Clauss Jönsson, Universität Tübingen)

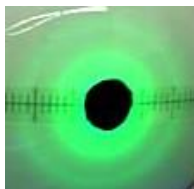
Περίθλαση ηλεκτρονίων σε έναν κρύσταλλο γραφίτη

Οι Davisson and Germer είχαν ήδη δείξει πειραματικά την περίθλαση ηλεκτρονίων στέλνοντας ηλεκτρόνια σε έναν κρύσταλλο. Λόγω του κυματικού τους χαρακτήρα, τα ηλεκτρόνια περιθλώνονται στις 'σχισμές' της μοριακής δομής του κρυστάλλου. Αυτό είναι το πείραμα που θα κάνετε εδώ. Θα εκτοξεύσουμε ηλεκτρόνια σε έναν κρύσταλλο γραφίτη. Θα παρουσιαστεί περίθλαση λόγω των μοριακών σχισμών.

Στο πείραμα, τα ηλεκτρόνια εκπέμπονται από ένα θερμό μεταλλικό νήμα (όπως και σε μία τηλεόραση) και επιταχύνονται από διαφορά δυναμικού. Εστιάζονται από μαγνητικά πεδία και καταλήγουν σε μια οθόνη παρατήρησης αφού διέλθουν μέσα από τον κρύσταλλο.

1. Μετρούμενα ηλεκτρονιακά κύματα από το διαμόρφωμα περίθλασης

Αν τα ηλεκτρόνια συμπεριφέρονται και ως κύματα, τότε πρέπει να παρουσιάζουν περίθλαση με μέγιστα και ελάχιστα ως συνέπεια των διαφορετικών διαφορών δρόμου από τις οπές του κρυστάλλου. Και αυτό ακριβώς παρατηρούμε. Βρίσκουμε όντως ένα διαμόρφωμα περίθλασης με μέγιστα και ελάχιστα το

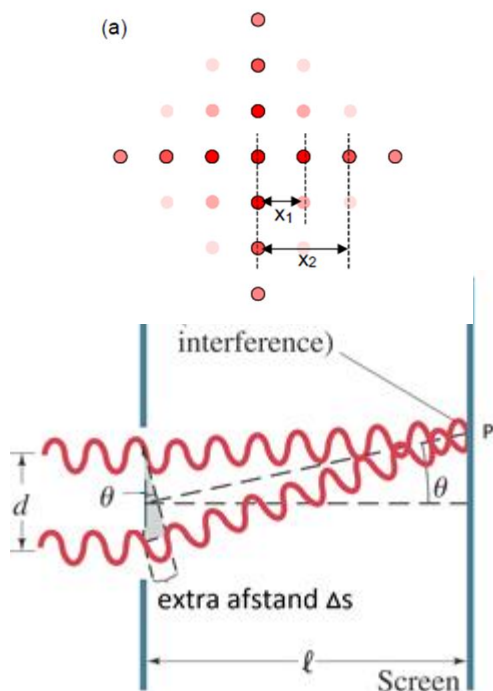


οποίο είναι κατα κάποιον τρόπο μία απεικόνιση των αποστάσεων στον κρύσταλλο. Το διαμόρφωμα περίθλασης στον κρύσταλλο γραφίτη κατασκευάζεται από ένα μοτίβο στο οποίο τα ηλεκτρόνια καταφθάνουν σε ομόκεντρους κύκλους: το αποτέλεσμα της κυματικής τους ιδιότητας!

Εικόνα. Το παρατηρούμενο διαμόρφωμα περίθλασης το οποίο παίρνουμε από την εκπομπή ηλεκτρονίων σε έναν κρύσταλλο γραφίτη

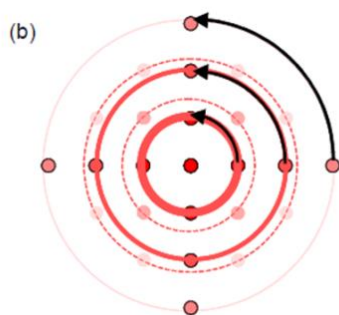
Ένας κρύσταλλος γραφίτη αποτελείται από πολλά στρώματα. Αν δούμε ένα από αυτά, βλέπουμε ότι υπάρχουν τρύπες ανάμεσα στα μόρια. Αυτές οι τρύπες παίζουν τον ρόλο του πλέγματος περίθλασης.

Πρακτική Δραστηριότητα: Περίθλαση Ηλεκτρονίων

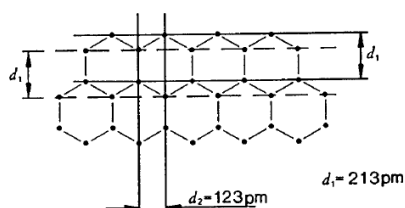


Αν δούμε ένα τέτοιο στρώμα, βλέπουμε ότι υπάρχουν τρύπες ανάμεσα στα μόρια. Αυτές οι τρύπες παίζουν τον ρόλο ενός πλέγματος περίθλασης. Τα κύματα ηλεκτρονίου διέρχονται από αυτό με τρόπο παρόμοιο με το φως το οποίο διέρχεται από ένα φράγμα περίθλασης.

Σύμφωνα με την αρχή του Huygens, κάθε σημείο είναι με τη σειρά του μια πηγή κυμάτων που διαδίδονται προς όλες τις κατευθύνσεις. Ωστόσο, θα υπάρξουν διαφορές δρόμου για όλα αυτά τα 'κύματα-Huygens'. Για καθορισμένες γωνίες η διαφορά δρόμου Δs μπορεί να γίνει αρκετά μεγάλη ώστε να έχουμε αντίθεση φάσης. Για τέτοιες αποστάσεις έχουμε ακυρωτική συμβολή. Σε αυτήν την περίπτωση δεν θα παρατηρήσουμε ηλεκτρόνια. Για άλλες γωνίες θα έχουμε ενισχυτική συμβολή των ηλεκτρονιακών κυμάτων. Στα σημεία αυτά θα παρατηρήσουμε μέγιστα και θα μπορούμε να βρούμε πολλά ηλεκτρόνια



Δεδομένου ότι ο κρύσταλλος γραφίτη αποτελείται από πολλά στρώματα τα οποία μπορούν να περιστραφούν το ένα σε σχέση με το άλλο, θα έχουμε μια κατάσταση σαν αυτή που απεικονίζεται στην εικόνα (b): Ο κρύσταλλος συμπεριφέρεται σαν να υπάρχουν 'στρογγυλές' τρύπες μέσα του. Το διαμόρφωμα συμβολής θα είναι με τη σειρά του κυκλικό επειδή η διαφορά δρόμου θα εμφανίζεται κυκλικά γύρω από την κεντρική δέσμη.



Ο κρύσταλλος από γραφίτη έχει ένα όμορφο εξαγωνικό σχήμα με βάση το οποίο μπορούν να παρατηρηθούν δύο διαφορετικές αποστάσεις.

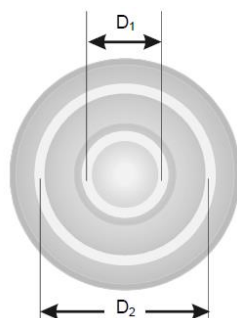
Λόγω του ότι τα στρώματα έχουν περιστραφεί, έχουμε μοριακά ανοίγματα με τα δύο παρακάτω μεγέθη:

$$d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$d_2 = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Πρακτική Δραστηριότητα: Περίθλαση Ηλεκτρονίων

Και οι δύο αποστάσεις δημιουργούν διαφορές δρόμου οι οποίες μπορούν να παρατηρηθούν στο διαμόρφωμα περίθλασης σαν αποστάσεις ανάμεσα στα μέγιστα D_1 και D_2 .



Εικόνα. Σχηματική απεικόνιση των δακτυλίων περίθλασης (μέγιστα) τα οποία είναι ορατά όταν στέλνουμε μία δέσμη ηλεκτρονίων μέσα από γραφίτη.

Προσδιορισμός του μήκους κύματος των ηλεκτρονίων από μετρήσεις της διαμέτρου D των μεγίστων της περίθλασης.

Χρησιμοποιώντας γεωμετρία μπορούμε να δείξουμε ότι η διαφορά δρόμου είναι ίση με: $2d \cdot \eta\mu\theta$.

Έχουμε **ενισχυτική συμβολή** αν η διαφορά δρόμου είναι ίση με έναν ολόκληρο αριθμό μηκών κύματος (των εισερχόμενων ηλεκτρονίων):

$$\text{Ενισχυτική συμβολή αν } n \cdot \lambda = 2d \cdot \eta\mu\theta \quad (2)$$

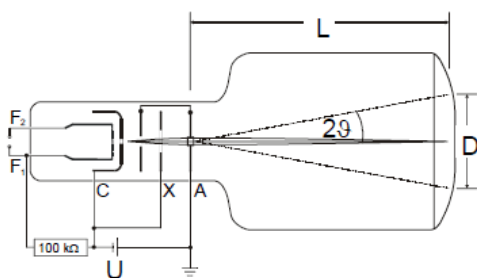
n : θετικός ακέραιος

d : απόσταση στο κρυσταλλικό πλέγμα

λ : μήκος κύματος των ηλεκτρονίων

Για μικρές γωνίες το παραπάνω απλοποιείται ως εξής:

$$\text{ενισχυτική συμβολή αν } \lambda = d \frac{D}{2L} \quad (3)$$



όπου D είναι η μετρούμενη διάμετρος του μέγιστου της περίθλασης. L είναι η απόσταση ανάμεσα στον κρύσταλλο και την οθόνη, που στην διάταξή μας ισούται με: $L = 133 \text{ mm}$.

Η δεξιά πλευρά της (3) είναι γνωστή (d γνωστό, L γνωστό, D μπορεί να μετρηθεί), άρα μπορούμε να βρούμε πειραματικά το μήκος κύματος λ ενός ηλεκτρονίου.

2. Προβλεπόμενο μήκος κύματος του ηλεκτρονίου από την σχέση του De Broglie

Θα προσδιορίσουμε το θεωρητικά προβλεπόμενο μήκος κύματος του ηλεκτρονίου από την υπόθεση του De Broglie (έτσι ώστε να είναι συγκρίσιμο με την μετρούμενη τιμή αργότερα). Η υπόθεση του De Broglie είναι: $\lambda = \frac{h}{p}$ (4)

Η σχέση του De Broglie προβλέπει ότι το μήκος κύματος εξαρτάται από την ορμή του ηλεκτρονίου. Όμως πόση ορμή προσφέρεται στο ηλεκτρόνιο; Ξέρουμε ότι ισχύει:

$$p = mv \quad (5)$$

Όμως ποια είναι η ταχύτητα των ηλεκτρονίων στο πείραμά μας;

Τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται από μια διαφορά δυναμικού V . Αυτό σημαίνει ότι αποκτούν ηλεκτρική ενέργεια από την τάση (Joule/Coulomb) επί το φορτίο τους. Η ηλεκτρική ενέργεια που αποκτά το ηλ/νιο είναι:

$$E = V \cdot q$$

Όπου q είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου : $q = e$. Το ηλεκτρόνιο στο πείραμα επομένως επιταχύνεται και αποκτά μια τελική ταχύτητα και επομένως μια τελική κινητική ενέργεια $\frac{1}{2} mv^2$.

$$E = V \cdot e = \frac{1}{2} mv^2$$

Από το οποίο προκύπτει ότι:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot V}{m}} \quad (6)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην ορμή του ηλεκτρονίου (5) βρίσκουμε την παρακάτω έκφραση:

$$p = mv = \sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot V} \quad (7)$$

$$m: \text{μάζα του ηλεκτρονίου} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$e: \text{φορτίο του ηλεκτρονίου} = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Η τιμή του μήκους κύματος De Broglie είναι:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot V}} \quad (8)$$

Με αυτήν την έκφραση μπορούμε να προβλέψουμε το μήκος κύματος που πρέπει να έχει το ηλεκτρόνιο με βάση την διαφορά δυναμικού που εφαρμόζουμε.

ΜΕΡΟΣ 2^ο : ΠΕΙΡΑΜΑ

Ελέγξτε εάν το προβλεπόμενο μήκος κύματος του ηλεκτρονίου- με βάση την υπόθεση του De Broglie- αντιστοιχεί στην μετρούμενη τιμή από το διαμόρφωμα περίθλασης.

1. Μετρούμενο μήκος κύματος του ηλεκτρονίου από το διαμόρφωμα περίθλασης

Στο πείραμα, οι διάμετροι D_1 και D_2 των δακτυλίων μετριοούνται για διαφορετικές τιμές της τάσης V (δείτε εικόνα 4). Πάρτε για παράδειγμα $V= 2,0 \text{ kV}$, $2,5 \text{ kV}$ κλπ.

$$\lambda_{\text{πειραματικό}} = d \frac{D}{2L}$$

Η απόσταση ανάμεσα στο στρώμα από γραφίτη και στην οθόνη ισούται με:

$L = 133 \text{ mm}$. Οι αποστάσεις στο κρυσταλλικό πλέγμα είναι: $d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ και $d_2 = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

$\frac{V}{\text{kV}}$	$\frac{D1}{\text{cm}}$	$\frac{\lambda_{D1}}{\text{nm}}$	$\frac{D2}{\text{cm}}$	$\frac{\lambda_{D2}}{\text{nm}}$

2. Προβλεπόμενο μήκος κύματος του ηλεκτρονίου με βάση τη σχέση του De Broglie.

Τώρα θα συγκρίνουμε τις μετρούμενες τιμές από το διαμόρφωμα περίθλασης για το μήκος κύματος του ηλεκτρονίου με τις τιμές που παίρνουμε από τη σχέση του De Broglie για δεδομένη εφαρμοζόμενη τάση.

$$\lambda_{de\ Broglie} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot V}}$$

m : μάζα του ηλεκτρονίου $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

e : φορτίο του ηλεκτρονίου $e = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

h : σταθερά του Planck $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Τώρα θα συγκρίνουμε αυτά με τις μετρούμενες τιμές λ_{D1} και λ_{D2} από το διαμόρφωμα συμβολής

$\frac{V}{kV}$	$\frac{\lambda_{de\ Broglie}}{nm}$	$\frac{\lambda_{D1}}{nm}$	$\frac{\lambda_{D2}}{nm}$

Επιβεβαιώνεται πειραματικά η υπόθεση του De Broglie για την κυματική φύση των ηλεκτρονίων;
 Συμφωνούν με τη θεωρητική πρόβλεψη τα μήκη κύματος που μετρήθηκαν από την περίθλαση;
 Ναι/Όχι